

Rapport fysikklab våren 2023

Celine Hansen, Oda Fossheim, Sivert Ask, Håkon Ulvik

Sammendrag

I dette forsøket ble det studert en kule som ruller på en berg-og-dal bane. Her endrer akselerasjon og kreftene seg langs rullebanen. Verdier ble funnet både numerisk og eksperimentelt for kulens posisjon og hastighet som funksjon av tiden, i tillegg til slutfart, total rulletid og kinetisk energi. I tillegg ble friksjonskraft, helningsvinkel og normalkraft funnet numerisk ved hjelp av Jupyter. Programmet Tracker ble brukt til å finne de eksperimentelle verdiene, mens alle grafene for numeriske verdier ble plottet i Jupyter. Kulens slutfart ble numerisk beregnet til 1.416 m/s, mens den eksperimentelle verdien ble beregnet til $1.405 \text{ m/s} \pm 0.001162 \text{ m/s}$. Konklusjonen er at de numeriske og eksperimentelle verdiene stemmer relativt godt overens med hverandre, og at alle antakelser som er gjort i forsøket derfor er rimelige og gyldige.

Introduksjon

Hensikten med dette forsøket er å beregne en baneform, simulere rullebevegelsen og deretter beregne kreftene som virker på kulen underveis. I tillegg sammenlignes målt og simulert rullebevegelse for kulen. Eksperimentet baseres på Newtons tre lover som er essensielle innenfor mekanisk fysikk. Disse lovene ble utformet av Isaac Newton og de beskriver sammenhengen mellom akselerasjon og kraft som deretter kan brukes til å beskrive bevegelsen til et objekt. [1] I dette forsøket ble Newtons andre lov brukt til beregninger, mens Eulers metode ble brukt for å finne tidsutvikling som inkluderer fart og posisjon til kulen som funksjon av tiden. Eulers metode brukes for å løse ordinære differensialligninger hvor løsningene brukes til å kunne sammenligne eksperimentelle og numeriske verdier.

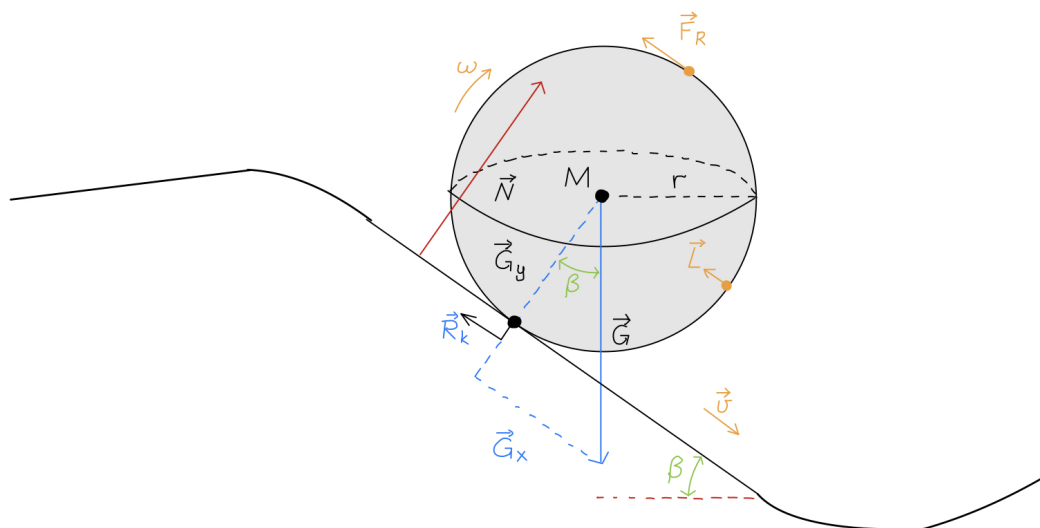
Teori

Newtons andre lov [1], er gitt ved

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

hvor $\sum \vec{F}$ er summen av kreftene, m er objektets masse og \vec{a} er akselerasjonen. Denne ligningen viser en sammenheng mellom kreftene som påvirker objektet og objektets akselerasjon. For et rullende objekt på et skråplan vil kun de kreftene som er parallelle med fartsretningen påvirke farten.

En rullebane kan deles opp i flere intervaller slik at baneformen manipuleres til å ligne et skråplan. Ved å gjøre dette kan et objekt som ruller ned en krum bane beskrives slik et objekt som ruller ned et skråplan beskrives. Kreftene som påvirker objektet i en gitt posisjon på rullebanen beskrives som om det er på et skråplan, hvor banens helningsvinkel settes lik skråplanets helningsvinkel i kontaktpunktet mellom objektet og banen. Se figur 1. Deretter kan alle intervallene til skråplanene settes sammen slik at objektets bevegelse på den krumme banen kan modelleres.



Figur 1 Viser alle kreftene som virker inn på kulen på baneformen og hvordan de påvirker den. M er massen til kulen, \vec{v} er kulens fart, β er skrpålanets helningsvinkel, \vec{R}_k er friksjonskraften, ω er hvor fort den roterer, \vec{F}_R er rotasjonskraften, r er kulens radius, \vec{N} er normalkraften, \vec{L} er luftmotstanden, og $\vec{G}_y/\vec{G}_x/\vec{G}$ er gravitasjonskraften, i tillegg til i x- og y-retning.

Luftmotstanden et objekt merker er tilnærmet proporsjonal med hastigheten dersom objektet ligner en kule og hastigheten er lav. Luftmotstanden vil øke med objektets hastighet og noe av motstanden kommer av friksjon mellom objektets overflate og luften som stryker langs det. Når rullebanens høydeforskjeller er små vil objektet ha relativ lav fart med relativ lav luftmotstand. Hvis rullebanen i tillegg er kort, vil luftmotstanden utføre relativt lite arbeid på kulen. En kan derfor anta at luftmotstanden ikke utfører noe arbeid i energiberegninger som gjelder korte baner med små høydeforskjeller. [2]

Den mekaniske energien til et rullende objekt er gitt ved

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}cmv^2$$

hvor m er objektets masse, v er objektets fart, g er tyngdeakselerasjonen, h er objektets høyde og c er en konstant avhengig av objektets fysiske egenskaper. Basert på disse antakelsene vil det ikke eksistere kontaktkrefter som vil utføre arbeid på objektet og dermed er energien bevart slik at den mekaniske energien vil være like stor før og etter at objektet er ferdig med rullebanen. I kulens startposisjon vil den totale mekaniske energien være gitt ved

$$E = m \cdot g \cdot y_0,$$

hvor y_0 er satt som kulens starthastighet, som er lik null.

I tillegg vil potensiell og kinetisk energi virke inn på den mekaniske energien, og dermed blir energibevarelsen gitt ved

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 + \frac{1}{2}cmv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}cmv^2$$

De to leddene $\frac{1}{2}cMv_0^2$ og $\frac{1}{2}cMv^2$ stammer fra treghetsmomentet til objektet og denne virker derfor inn på den mekaniske energien. Her er den kinetiske energien også viktig for å kunne si noe om hastigheten til et rullende objekt. Kinetisk energi uttrykkes av summen av translasjons- og rotasjonsenergi, gitt ved

$$K = (1 + c) \frac{mv^2}{2}$$

Et objekts treghetsmoment viser hvor mye et objekt vil motsette seg forandringer i rotasjonshastighet. Altså vil ulike objekter har ulike treghetsmoment [3]. Treghetsmomentet er gitt ved

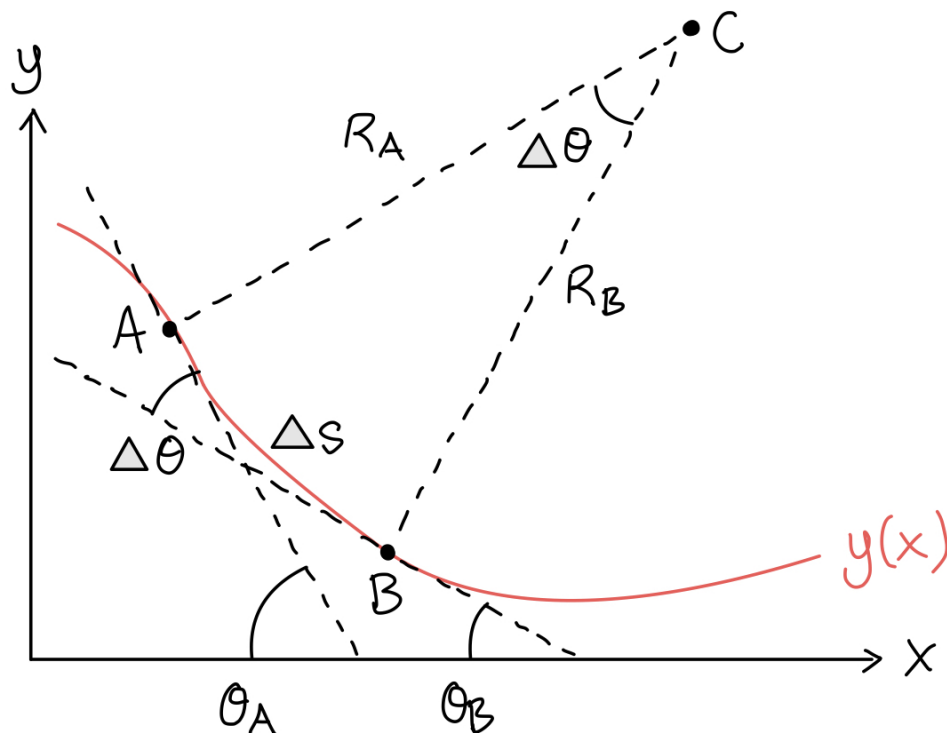
$$I_0 = cMR^2$$

Hvor M er massen til objektet, c er en konstant som avhenger av objektet og R er objektets radius som er antatt å være mindre enn banens krumningsradius. Dette fører til at objektets massesenter vil følge krumningen slik at hastighetsberegninger lettere kan gjøres.

Farten objektet har ved en gitt høyde kan uttrykkes ved hjelp av energibevaring. En kan anta at startfarten til et objekt er $v(y) = 0$ og at baneformen uttrykt ved $y(x)$ er kjent. Her er x og y henholdsvis den horisontale og vertikale posisjonen til objektet. Dette gir $v(x)$ uttrykt ved

$$v(x) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y(x))}{1+c}}$$

I denne ligningen er det antatt at objektet ruller uten sluring og at massetettheten er konstant.



Figur 2 viser baneformen $y(x)$ og hvordan vi ved hjelp av de like variablene kan finne banens krumning. Det velges to punkter, A og B, hvor banens lengde mellom disse settes som Δs . En kan se på dette som en liten del av en sirkel, som dermed gir radius $R \approx R_A \approx R_B$ med sentrum i punkt C. Det gir vinkelen $\Delta\theta = \Delta s/R$. [6]

Krumningen på banen forandres langs baneformen gitt ved $y(x)$. Se figur 2. Krumningen, κ , er gitt ved

$$\kappa = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

I tillegg har vi da at krumningradien er gitt av

$$R = \frac{1}{\kappa},$$

og en ser da at krumningen alltid vil ha en endelig verdi så lenge den deriverte til baneformen er en kontinuerlig funksjon, mens krumningradien i teorien kan bli uendelig stor (som for en rett linje). [6]

Ved å bruke krumningen, κ , og $v(x)$ kan sentripetalakselerasjonen til et objekt uttrykkes. Sentripetalakselerasjonen sier noe om akselerasjonen inn mot sentrum for objektet når den beveger seg langs baneformen [4], og er gitt ved

$$a_{\perp} = v^2 \cdot \kappa$$

Normal- og friksjonskraften som virker på et objekt kan beregnes ved hjelp av a_{\perp} og Newtons andre lov som virker normalt på banen. Dersom tyngdekraften, G , som virker inn på objektet er definert i negativ retning settes normalkraften i positiv retning. Da vil tyngdekraften gis ved $G = M \cdot g \cdot \cos\beta$, hvor g er gravitasjonskraften og β er helningsvinkelen til baneformen. Ved hjelp av disse kan normalkraften uttrykkes ved

$$N = M(\cos\beta + a_{\perp})$$

Her er β ukjent, men den kan beregnes ved å se at når vinkelen er mindre enn null så vil objektet rulle nedover, og oppover når den er større enn nul. Helningsvinkelen, β beregnes dermed fra ligningen gitt ved

$$\beta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Friksjonskraften, R_k , og tangentialkomponenten til tyngden er kretfene som kan observeres at virker tangentielt på et objekt som ruller ned en baneform [5]. Friksjonskraften er gitt ved

$$R_k = \frac{c \cdot M \cdot g \cdot \sin\beta}{1+c}$$

Tangentialkomponenten er gitt ved

$$-Mg\sin\beta.$$

Usikkerhetsberegninger er nødvendig å ta hensyn til når det utføres forsøk med eksperimentelle målinger. Usikkerhetene kommer ved for eksempel måling av lengder og hvordan en velger å avrunde tall. Disse tallene virker inn på resultatene en får og det er

derfor viktig å vite måleusikkerhetene. Standardfeil er vesentlig for å beregne usikkerhetene, og den beregnes ved å bruke et gjennomsnitt. Dette gjennomsnittet er gitt ved

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Det finnes flere ulike kilder til usikkerhet enn standardavviket. Forskjellige eksempler på dette er at ulike antakelser gjøres eller at definisjonene på usikkerhetene er annerledes fra person til person, i tillegg til systematiske feil slik som feil ved måleinstrumenter. Man må i tillegg til dette ta hensyn til standardavviket. Standardavvik viser hvor mye verdiene i gjennomsnitt avviker fra den mest sannsynlige verdien, og er gitt ved følgende ligning

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Standardavviket brukes deretter for å beregne standardfeilen. Denne er gitt ved

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Metode

Berg-og-dal banen ble generert ved en gitt funksjon i baneform_v23.py. Med dataene fra denne baneformen ble det beregnet numerisk fart, helningsvinkel, tidsutvikling, total rulletid, normalkraft $N(x)$, friksjonskraft $F(x)$ og $|\frac{F(x)}{N(x)}|$.

Eulers metode sammen med formlene gitt i teorien ble brukt for å gjøre alle de numeriske beregningene av farten og akselerasjonen til kula. Disse ble også brukt for å finne tidsutviklingen, som igjen ble brukt til å beregne tiden, gitt av δt_n . Denne gir et mål på hvor lang tid kula bruker på å rulle på et intervall fra x_{n-1} til x_n . På slutten av dette intervallet er kulens horisontale fart gitt ved

$$v_{x,n} = v_n \cdot \cos \beta_n$$

hvor v_n er hastigheten i punktet (x_n, y_n) og β_n er banens helningsvinkel i samme punkt. Dette kan brukes til å finne en tilnærming av gjennomsnittet av den horisontale farten som er gitt ved:

$$\langle v_n \rangle = \frac{1}{2} (v_{x,n-1} + v_{x,n})$$

Deretter er det mulig å finne ut hvor lang tid objektet brukte på hele intervallet:

$$\Delta t_n = \frac{\Delta x_n}{\langle v_x \rangle_n}$$

Før kula ble rullet på banen, ble banen satt opp etter den genererte banen som ble bestemt av funksjonen i baneform_v23.py. Deretter ble kula sluppet nedover baneformen fra startpunktet. Kula rullet deretter på hele banen, frem til sluttpunktet. Dette ble tatt opp på film, og videre analysert i Tracker. Herfra kunne det hentes ut både tiden, farten og posisjonen til kula, slik at det ble gitt ut eksperimentelle verdier. Dette ble gjort 10 ganger før de eksperimentelle verdiene ble plottet opp mot de numeriske verdiene. Slutfarten ble også til slutt analysert, og gjennomsnittet av de eksperimentelle dataene ble sammenliknet med den numeriske dataen.

Resultater

Vedlagt nedenfor ligger pythonkoden brukt i de numeriske beregningene i forsøket med tilhørende figurer.

Den numeriske slutfarten ble bestemt til å være 1.416 m/s, den eksperimentelle slutfarten ble bestemt til å være 1.405 m/s \pm 0.001162.

De eksperimentelle resultatene ble beregnet for 10 videoer med programmet Tracker. I tillegg ble kulen målt til å ha radius lik 10 mm og masse lik 30,4 g. Resultatene er gitt i følgende tabell (Tabell 1):

Video	Slutfart i m/s	Total rulletid i s
1	1.397	1.435
2	1.541	1.402
3	1.248	1.352
4	1.327	1.285
5	1.486	1.283
6	1.398	1.302
7	1.471	1.267
8	1.453	1.352
9	1.387	1.285
10	1.341	1.402

I tillegg til dette er det blitt beregnet kinetisk energi (E) og tap av mekanisk energi for alle de ti forsøkene. Tap i mekanisk energi er beregnet ved å ta potensiell energi ved start minus kinetisk energi ved slutt. Resultatene av dette er gitt i følgende tabell (Tabell 2):

Forsøk	Kinetisk energi [J]	Tap i mekanisk energi [J]
1	0.0297	0.0130
2	0.0361	0.0066
3	0.0237	0.0190
4	0.0268	0.0159
5	0.0335	0.0092
6	0.0297	0.0130
7	0.0329	0.0098
8	0.0321	0.0106
9	0.0292	0.0135
10	0.0273	0.0154

Den midlere verdien for tapet i mekanisk energi ble her beregnet til 0.01259 J.

Standardavviket for tapet ble beregnet til 0.00367 J, mens standardfeilen ble beregnet til 0.001162 J.

```

In [30]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.interpolate import CubicSpline

h = 200
xfast=np.asarray([0,1,2,3,4,5,6,7])*h

xmin = 0
xmax = 1401
dx = 1
x = np.arange(xmin,xmax,dx)

#Skruehøyder:
yfast = np.zeros(8)
yfast[0] = 300
yfast[1] = 245
yfast[2] = 159
yfast[3] = 142
yfast[4] = 178
yfast[5] = 166
yfast[6] = 122
yfast[7] = 157

cs = CubicSpline(xfast,yfast,bc_type='natural')

y = cs(x)
dy = cs(x,1)
d2y = cs(x,2)

baneform = plt.figure('y(x)',figsize=(12,6))
plt.plot(x,y,xfast,yfast,'*')
plt.title('Figur 3: Banens form', fontsize=20)
plt.xlabel('$x$ (mm)',fontsize=20)
plt.ylabel('$y(x)$ (mm)',fontsize=20)
plt.text(10,80,'Skruehøyder (mm):', fontsize=16)
plt.text(-40, 50, int(yfast[0]), fontsize=16)
plt.text(160, 50, int(yfast[1]), fontsize=16)
plt.text(360, 50, int(yfast[2]), fontsize=16)
plt.text(560, 50, int(yfast[3]), fontsize=16)
plt.text(760, 50, int(yfast[4]), fontsize=16)
plt.text(960, 50, int(yfast[5]), fontsize=16)
plt.text(1160, 50, int(yfast[6]), fontsize=16)
plt.text(1360, 50, int(yfast[7]), fontsize=16)
plt.ylim(0,300)
plt.xlim(-50,1450)
plt.grid()
plt.show()

y37 = y[400:1400]
y27 = y[200:1400]
y37min = np.min(y37)
y37max = np.max(y37)
y27min = np.min(y27)
y27max = np.max(y27)
K = d2y/(1+dy**2)**(1.5)

```

```

R = 1/(np.abs(K)+1E-8) #unngår R = uendelig
Rmin = np.min(R)
beta = np.arctan(dy)
betadeg = beta*180/np.pi
startvinkel = betadeg[0]
maksvinkel = np.max(np.abs(betadeg))

print('Høyeste punkt etter 3.skrue (mm): %4.0f' %y37max)
print('Laveste punkt etter 2.skrue (mm): %4.0f' %y27min)
print('Starthelningsvinkel (grader): %4.1f' %startvinkel)
print('Maksimal helningsvinkel (grader): %4.1f' %maksvinkel)
print('Minste krumningsradius (mm): %4.0f' %Rmin)
print('Festepunkthøyder (mm):', yfast)
print(betadeg)

plt.figure('betadeg',figsize=(12,6))
plt.plot(x,betadeg)
plt.title('Figur 4: Banens helningsvinkel', fontsize=20)
plt.xlabel('$x$ (mm)',fontsize=20)
plt.ylabel('$\u03B2$ (degree)',fontsize=20)

plt.grid()
plt.show()

v = np.sqrt((2*9.81*(0.3-(y*10**(-3)))/(1+(2/5))))
plt.figure('v(x)',figsize=(12,6))
plt.plot(x,v)
plt.title('Figur 5', fontsize=20)
plt.xlabel('x',fontsize=20)
plt.ylabel('Farten, v(x)', fontsize=20)
plt.grid()
plt.show()
print('farten er lik:',v)

# Finner Tidsutvikling og total rulletid
v_horisontal = v * np.cos(beta)
snitt_v_horisontal = np.array([])
for n in range(1, len(v_horisontal)):
    snitt_v_horisontal = np.append(snitt_v_horisontal, 0.5 * (v_horisontal[n] + v_l

dt = []
dt.append(0)
for n in range(len(snitt_v_horisontal)):
    dt.append(dt[n] + (dx / snitt_v_horisontal[n]))
print('Dette er total numerisk rulletid i millisekunder:', dt[-1])

#Finner normal kraften
g = 9.81 #[m/s^2]
M = 0.03 #[kg] (dette er en antagelse da jeg ikke vet massen av kula)
sent_aks = d2y / ((1 + dy ** 2) ** (3 / 2))
N = M * (sent_aks + g * np.cos(beta)) #Usikker på om det skal være beta eller betadeg
plt.figure('y(x)',figsize=(12,6))
plt.plot(x,N)
plt.title('Figur 6: Normalkraft')
plt.xlabel('$x$ (m)')
plt.ylabel('$N$ (m)')
plt.grid()
plt.show()
print(N)

```

```

#Finner friksjonskraften
c = 2/5 #Konstant
R_k = (c * M * g * np.sin(beta) / (1 + c)) #Friksjonskraften f
plt.figure('friksjonskoeffisient',figsize=(12,6))
plt.plot(x,R_k)
plt.title('Figur 7: Friksjonskraften Rk')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('R_k')
plt.grid()
plt.tight_layout()
plt.show()
print(f)

relation_fN = np.abs(R_k/N)
plt.figure('fN',figsize=(12,6))
plt.plot(x,relation_fN)
plt.title('Figur 8: forhold mellom friksjonskraften Rk og normalkraften N og x', fo
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('R_k/N')
plt.grid()
plt.show()
print(relation_fN)

plt.figure('v(t)',figsize=(12,6))
plt.plot(dt, v, label='Numerisk', color = 'blue')
plt.title('Figur 9: farten v(x) som funksjon av tiden i sek.')
plt.xlabel('$t$ [s]',fontsize=20)
plt.ylabel('$v$ [m/s]',fontsize=20)
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
print(v[len(v)-1])

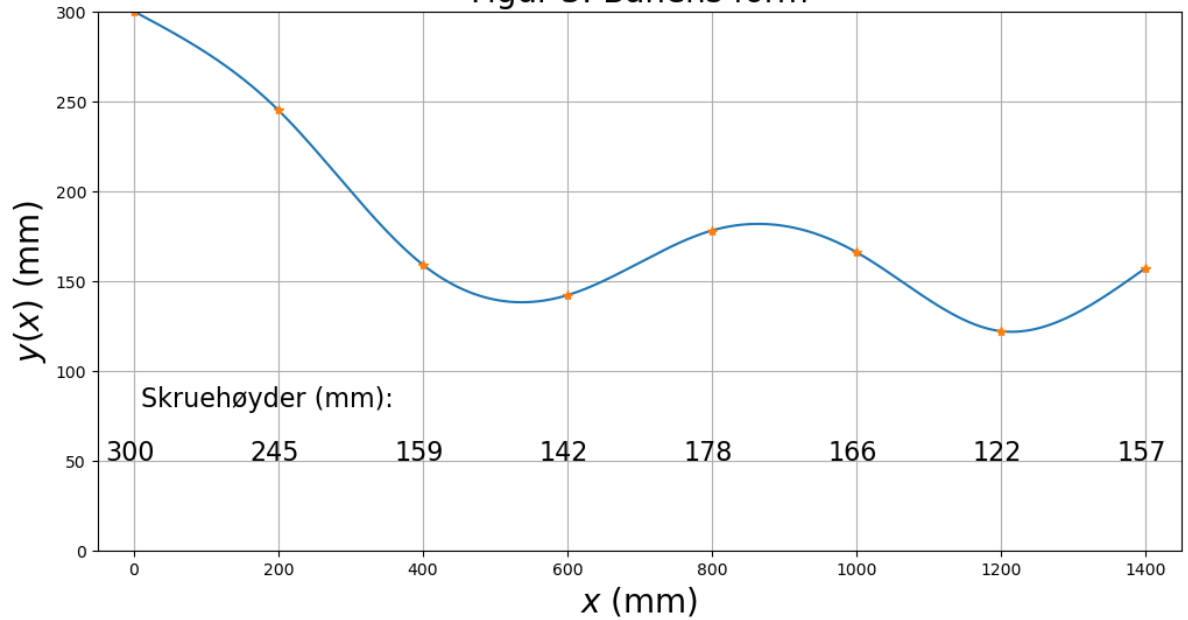
#Middlere verdi
delta_E = np.array([1.3*10**(-2), 6.55*10**(-3), 1.9*10**(-2), 1.59*10**(-2), 9.15*10
delta_E_mid = (1/10) * sum(delta_E)
print('Middlereverdi:', delta_E_mid)

#Standardavvik
avvik = np.sqrt((1/(10-1)*sum((delta_E - delta_E_mid)**2)))
print('Standardavvik:', avvik)

#Standardfeil
feil = avvik / np.sqrt(10)
print('Standardfeil:', feil)

```

Figur 3: Banens form



Høyeste punkt etter 3.skrue (mm): 182

Laveste punkt etter 2.skrue (mm): 122

Starthelningsvinkel (grader): -12.1

Maksimal helningsvinkel (grader): 25.2

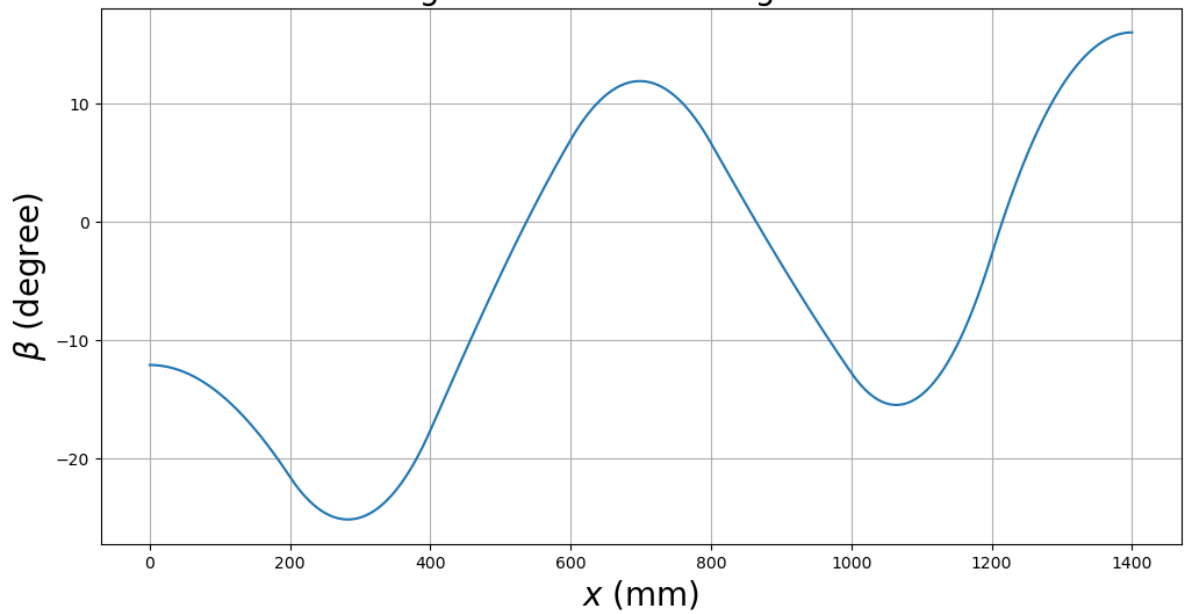
Minste krumningsradius (mm): 299

Festepunkthøyder (mm): [300. 245. 159. 142. 178. 166. 122. 157.]

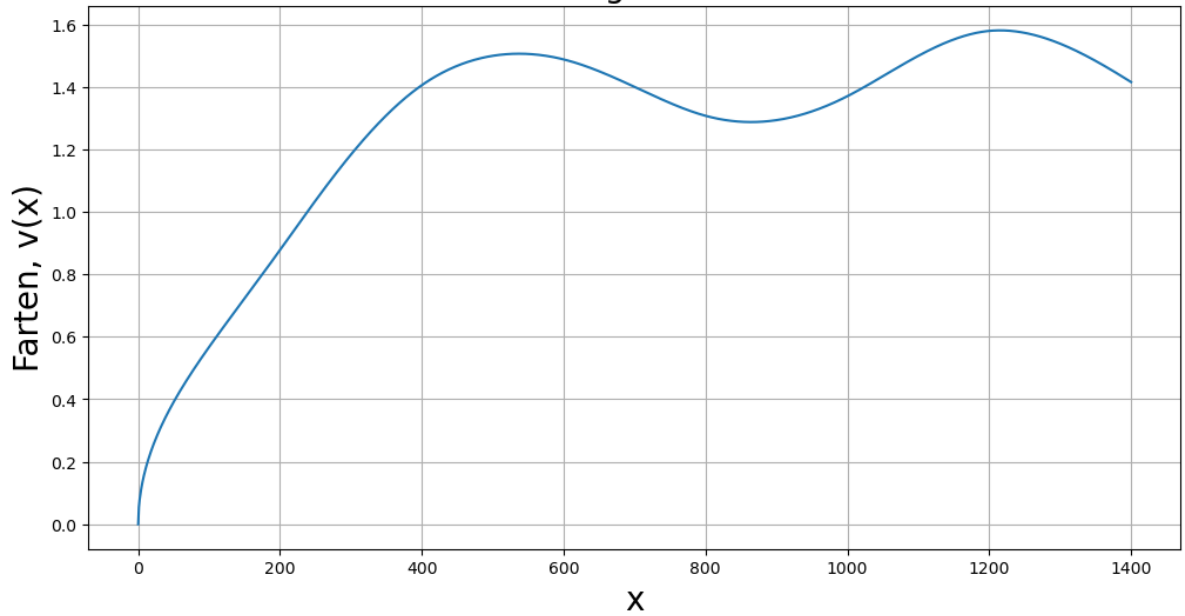
[-12.11619489 -12.11644269 -12.11718608 ... 16.00493739 16.00626995

16.00671413]

Figur 4: Banens helningsvinkel



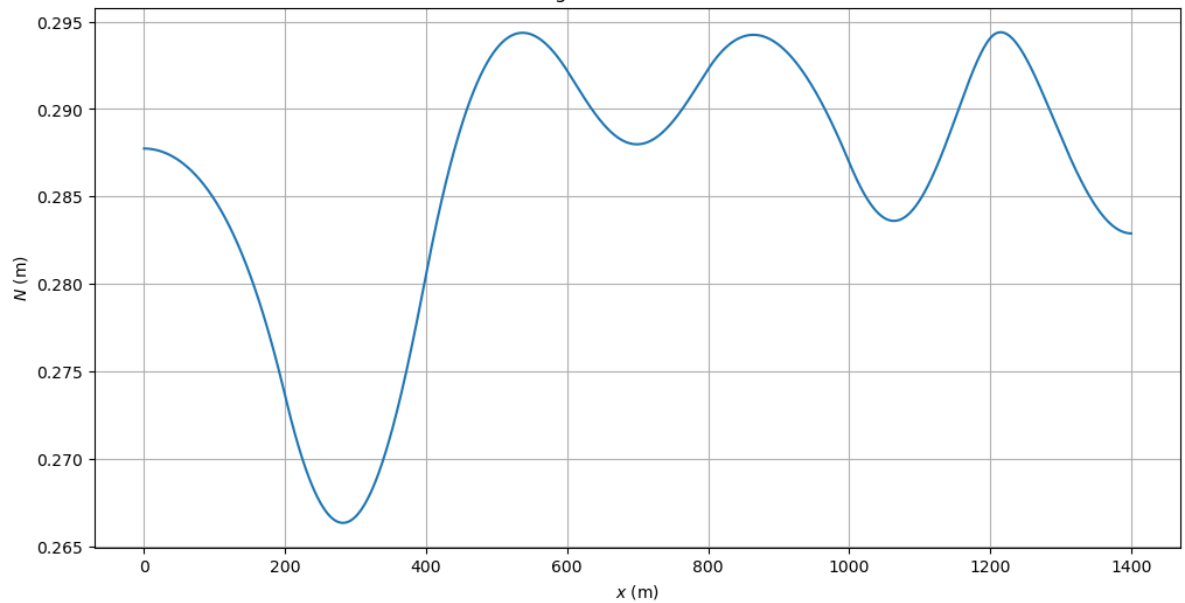
Figur 5



farten er lik: [0.05485041 0.07757101 ... 1.41847917 1.41706144 1.41564221]

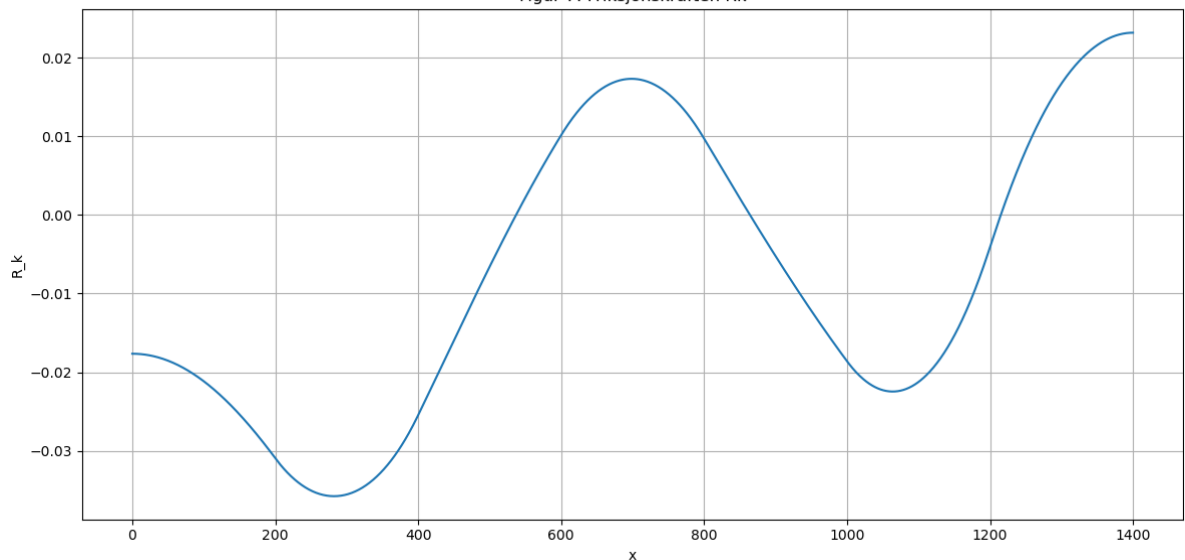
Dette er total numerisk rulletid i millisekunder: 1416.3064636416573

Figur 6: Normalkraft



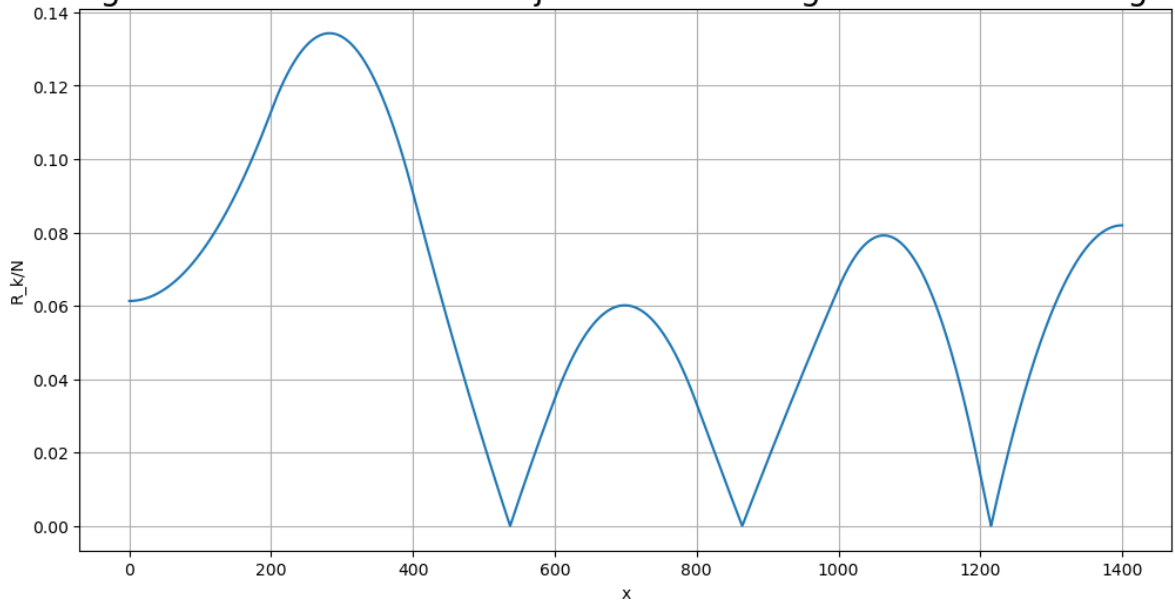
[0.28774416 0.28774364 0.28774258 ... 0.28289322 0.28289089 0.28288981]

Figur 7: Friksjonskraften Rk



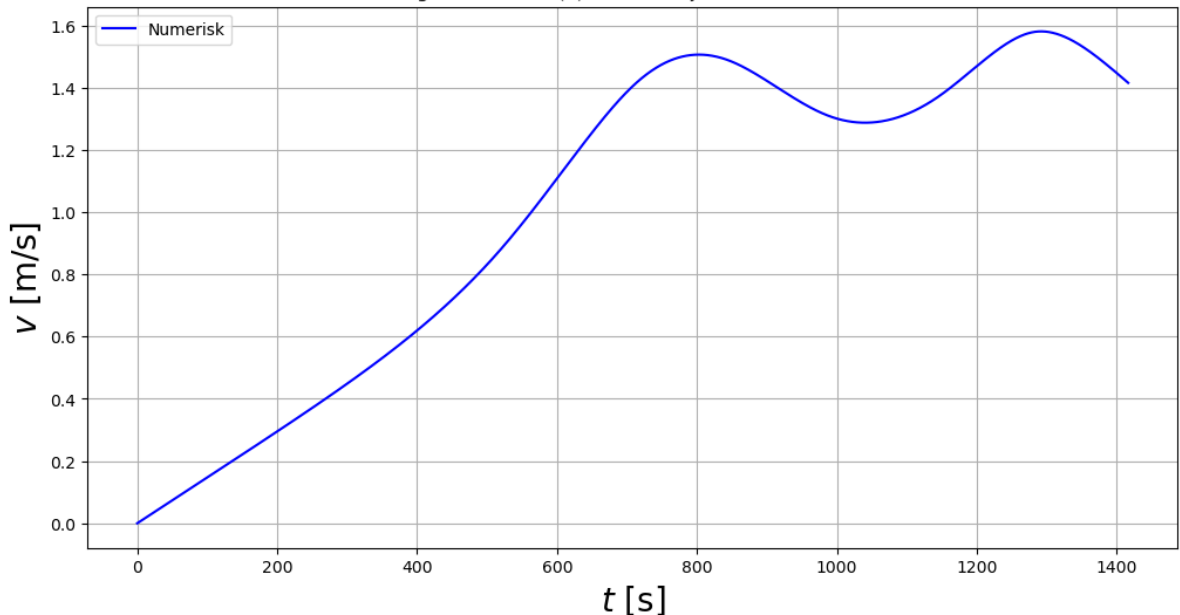
[-0.01764917 -0.01764952 -0.01765059 ... 0.02318413 0.02318601
0.02318664]

Figur 8: forhold mellom friksjonskraften R_k og normalkraften N og x



[0.06133631 0.06133766 0.06134159 ... 0.08195364 0.08196096 0.08196349]

Figur 9: farten $v(x)$ som funksjon av tiden i sek.



1.4156422066125527

Middlereverdi: 0.012584999999999999

Standardavvik: 0.0036734066840831366

Standardfeil: 0.0011616331893789305

Diskusjon

Den numeriske baneformen $y(x)$ er vist i figur 3. Den eksperimentelle ble lagt ved å bruke de punktene som den grafen gir. Det er en selvfølge at det kan forekomme ulikheter i den eksperimentelle baneformen, ettersom feil kan forekomme. I tillegg ble Tracker brukt for utregninger av den eksperimentelle baneformen, og ved bruk av dette programmet kan det ha skjedd at kulen for eksempel ikke "startet" på samme sted, noe som kan føre til ulikheter i numerisk og eksperimentell hastighet $v(x)$ som ble funnet.

Andre faktorer som kan gi forskjeller i numeriske og eksperimentelle verdier for $v(x)$ med utgangspunkt i $y(x)$, er at det er sannsynlig at kulen ikke ble sluppet ned på banen på samme måte alle de ti gangene eksperimentet ble utført. Dette vil føre til at startfarten vil

være ulik i de ti eksperimentelle forsøkene, mens det numeriske forsøket bare ble gjennomført en gang og baseres helt alene på dette. I tillegg til at startfarten kan variere, er det også mulig at høyden kulen ble sluppet fra også varierte eksperimentelt. Dette vil dermed også påvirke slutt hastigheten, og dermed også hele rulletiden og de påfølgende beregningene som ble utført.

Det at det også kan variere mellom høyden på festepunktene på numerisk og eksperimentell baneform, vil også påvirke total rulletid, og føre til avvik mellom kulens start- og slutt hastighet i numerisk og eksperimentell modell. En ser fra resultatene i tabell 1 at den numeriske slutfarten er på 1.416 m/s mens den eksperimentelle er 1.402 +- 0.00162. Altså er forskjellen mellom numerisk og eksperimentell slutfart på 0.014 m/s, som er en del mer enn hva den eksperimentelle usikkerheten tilsier. Avviket er likevel ikke altfor stort og det er flere feilkiler, slik som de beskrevet over, som kan forklare hvorfor.

Grafen for $v(x)$ er rimelig siden hastigheten er størst i bunnpunktene og reduseres på vei til topppunktene. Grafen for $N(x)$ er også å anse som rimelig da normalkraften er størst i topp- og bunnpunktene og minst i vendepunktene. Dette er logisk siden normalkraften vil ha størst påvirkning der hvor kulen er i en tilstand hvor den ikke triller opp eller ned en bane, og den vil ha minst virkning der den dobbeltderiverte av kulas bane endrer fortegn. Som grafene for $v(x)$ og $N(x)$, er også grafen til $f(x)$ rimelig. Dette vurderes ut i fra at friksjonen er beregnet til å være størst og minst i vendepunktene henholdsvis avhengig av om kurven går opp eller ned.

I dette forsøket er det antatt at kulen ruller rent, altså uten sluring på baneformen. Det er sannsynlig å anta at dette stemmer, dersom en ser på den beregnede friksjonskraften og den maksimale statiske friksjonskraften. For at antakelsen skal stemme, må den beregnede friksjonskraften langs hele baneformen være mindre enn den maksimale statiske friksjonskraften, som er gitt ved $\mu_s N$. Grafen som plotter disse opp mot hverandre er vist i Figur 8. Kulen brukt i forsøket er en datamuskule i en type gummi, mens banen er av hard plast, og det er derfor rimelig å anta at verdien av μ_s vil være minst 0.4 eller rundt dette [7]. Fra grafen i Figur 8 kan en se at den minimale friksjonskoeffisienten som trengs for at kulen ikke lenger skal gli, aldri overstiger 0.14. Altså observeres det at den beregnede friksjonskraften aldri blir like høy som den antatte verdien, noe som betyr at kulen alltid vil rulle rent.

Den beregnede numeriske rulletiden er 1.416 sekunder, mens om man tar gjennomsnittet av den eksperimentelle målte rulletiden er den på 1.337 sekunder. Dette er som nevnt under diskusjonen om kulens hastighet er et rimelig resultat, da bruker og dataprogrammet ikke er perfekte, og ikke vil klare å gjennomføre eksperimentet optimalt.

Det målte tapet av mekanisk energi, gitt i Tabell 2, er innenfor det en kan anse som rimelig. Gjennomsnittet av disse målingene gir et tap i mekanisk energi på 0.0126 J. Mengden energi som er gått tapt er altså relativt liten, noe som er forventet fra en kule med de egenskapene som en datamuskule har. Det at den triller og ikke sklir i noen særlig grad vil føre til best bevaring av den mekaniske energien siden dette minimerer effekten friksjon vil få på energitapet. Det at forsøket ble utført i et innendørsrom med få luftstrømmer gjør også til at luftmotstanden er å anse som konstant og det er få luftstrømmer som kan enten tilføre

energi eller kreve energi. Dette virker som et altså rimelig resultat ut ifra antakelsene som er blitt gjort i dette eksperimentet.

Konklusjon

Ved hjelp av Jupyter og Tracker er henholdsvis numeriske og eksperimentelle data funnet for kulen som ble trillet langs en krummet baneform. Den numeriske slutfarten er 1.416 m/s, mens den eksperimentelle ble beregnet til $1.402 \text{ m/s} \pm 0.00162 \text{ m/s}$. Dette er relativt liten forskjell, selvom den numeriske er noe over usikkerhetsområdet, men dette kan forklares utifra de oppgitte feilkildene slik som målefeil ved utføring eller brukerfeil i Tracker. Den numerisk rulletiden er 1.416 sekunder, mens den eksperimentelle er 1.337 sekunder. Her er det litt større avvik, men likevel ikke avgjørende stort. Det samme kan ses av det beregnede tapet i mekanisk energi som er på 0.0126 J, noe som anses som et rimelig tap basert på de antakelsene som er gjort. De numeriske og eksperimentelle resultatene avviker altså ikke for mye fra hverandre, og det er derfor rimelig å konkludere med at antakelsene gjort i eksperimentet er gyldige.

Referanser

- [1] Grøn, Øyving: *Newtons lover*. https://snl.no/Newtons_lover, sjekket: 02.03.23.
- [2] Hofstad, Knut: *luftmotstand*. <https://snl.no/luftmotstand>, sjekket: 02.03.23.
- [3] Grøn, Øyvind: *Tregghetsmoment*. <https://snl.no/tregghetsmoment>, sjekket 14.03.23.
- [4] Delphin, I.L.A.: *Sentripetalakselerasjon*. <https://snl.no/sentripetalakselerasjon>, sjekket 14.03.23.
- [5] Nesse, T. og V. Risinggård, Institutt for fysikk NTNU: *NTNU fysikklab*. <https://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/oppgave.html>, sjekket februar/mars 2023.
- [6] <https://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/files/oppgave2.pdf>, sjekket 14.03.23.
- [7] J. A Støvneng. *Ren rulling på krumt underlag - energibevarelse*. https://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/files/labligninger_V23.pdf